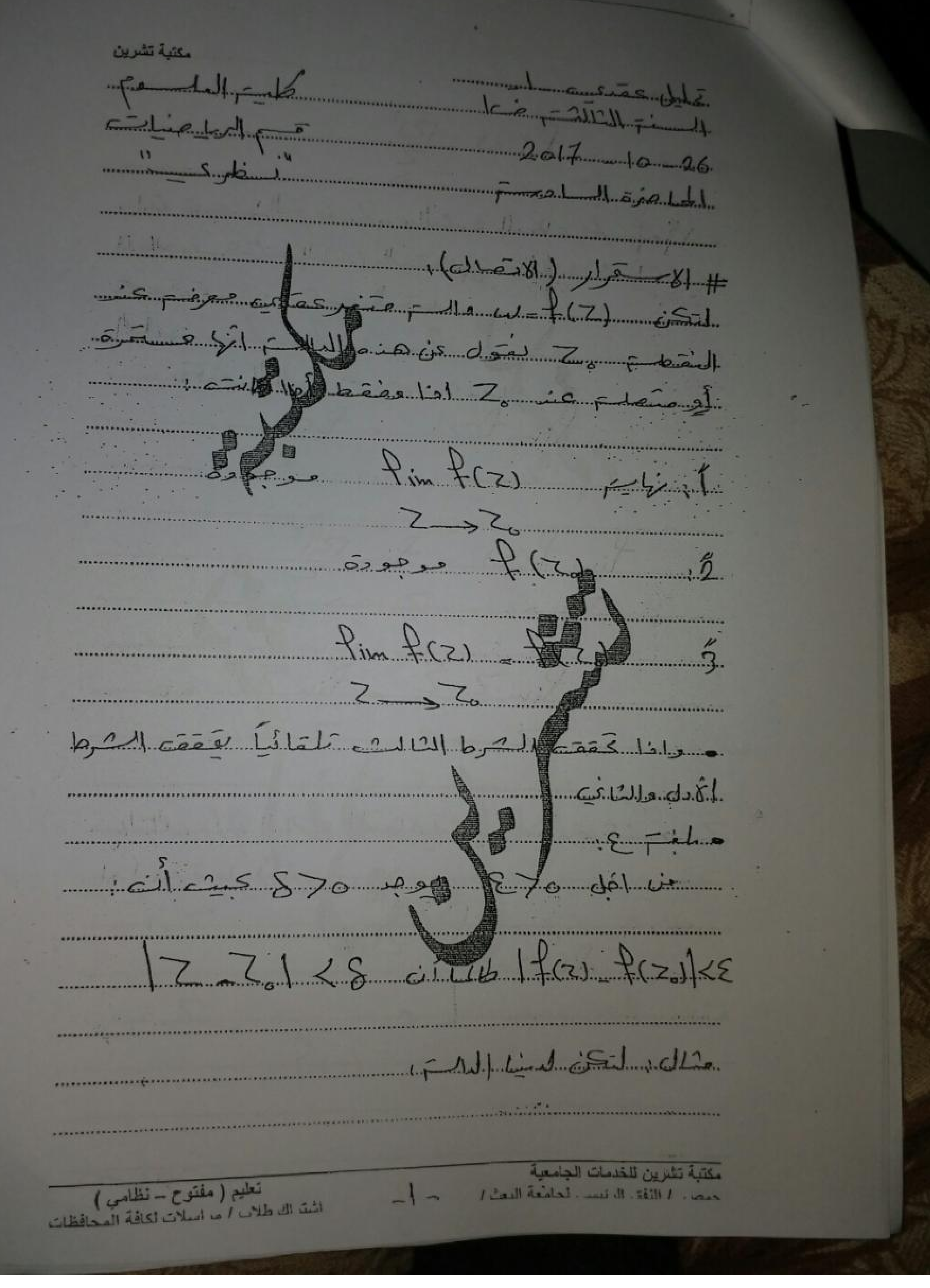


الاستمرار (الاتصال):

لتكن $w=f(z)$ دالة متغير عقدي معرفة عند النقطة z_0 نقول عن هذه الدالة أنها مستمرة أو متصلة عند z_0 إذا وفقط إذا كانت:

1: نهاية $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة

2: $f(z_0)$ موجودة

3: $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

• وإذا تحقق الشرط الثالث تلقائياً يتحقق الشرط الأول والثاني

• ملاحظة:

من أجل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن:

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ طالما أن $|z-z_0|<\delta$

مثال: لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = \frac{|z|^2}{z}$$

ان مجموعة التعريف لهذه الدالة المعطاة هي $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

المطلوب عرّف الدالة السابقة عند $z=0$ لتكون مستمرة عند هذه النقطة

الحل:

تكون الدالة مستمرة عندما

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0)$$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z \cdot \bar{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0$$

وبالتالي فإن الدالة المعطاة تصبح مستمرة عند $z=0$ اذا وفقط اذا:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

مبرهنة :

ليكن $z_0 = x_0 + i y_0$ و

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

يكون :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)$$

إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$$

ملاحظة :

من المبرهنة السابقة نستنتج أن :

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

تكون مستمرة إذا كانت كلا من الدالتين u و v دوال مستمرة والعكس صحيح

مثال د. العلي :

$$f(z) = e^x \cos y + i\,e^x \sin y$$

هي دالة مستمرة عند جميع نقاط المستوي العقدي

لأن:

كل من الدالة $u(x,y) = e^x \cos y$

والدالة $v(x,y) = e^x \sin y$

هي دوال مستمرة حيث كل منها تمثل جداء

دالتين مستمرتين أي e^x , $\cos x$, $\sin x$

دوال مستمرة ⇐ $f(z)$ دالة مستمرة

• يمكن الإثبات على:

– مجموع دالتين مستمرتين في المستوي العقدي هي دالة مستمرة

– جداء دالتين مستمرتين في المستوي العقدي هي أيضاً دالة مستمرة

– قسمة دالتين مستمرتين في المستوي العقدي هي دالة مستمرة بشرط المقام لا يساوي الصفر (لا ينعدم).

• تكون الدالة $f(z)$ دالة مستمرة على المنطقة D (المنطقة مجموعة مفتوحة مترابطة) إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط هذه المنطقة

• ملاحظة هامة:

إذا كانت الدالة $f(z)$ مستمرة على المنطقة المغلقة والمحدودة D عندئذٍ تكون الدالة مقياس $f(z)$:

$$|f(z)| = \sqrt{u^2+v^2}$$

هي دالة مستمرة أيضاً على هذه المنطقة D وتبلغ قيمتها العظمى على هذه المنطقة بمعنى أنه يوجد $M>0$ بحيث أن:

$$\forall z \in D \; ; \; |f(z)| \leq M$$

$|f(z)| = M$ من أجل نقطة واحدة على الأقل $z \in D$

مثال: لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = iz^3 + 1$$

أثبت أن هذه الدالة محددة على القرص الدائري $|z| \leq 1$

الحل:

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$$

$$= (iz^3+z)\overline{(iz^3+z)}$$

$$= (iz^3+z)(\bar{i}\,\bar{z}^3+\bar{z})$$

$$= (iz^3+z)(-i\bar{z}^3+\bar{z})$$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = (ie^{i3\theta}+e^{i\theta})(-ie^{-3i\theta}+e^{-i\theta})$$

$$= 1 + ie^{2i\theta} - ie^{-2i\theta} + 1$$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = 2 + i(e^{i2\theta} - e^{-2i\theta})$$

$|z| \le 1$
$\Rightarrow z = e^{i\theta}$
$|z| = |e^{i\theta}| = 1$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = 2 + i(2i)\left(\frac{e^{i2\theta}-e^{-2i\theta}}{2i}\right)$$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = 2 - 2\sin 2\theta$$

نعلم أن: $-1 \le \sin 2\theta \le 1$

$$-2 \le -2\sin 2\theta \le 2$$

ومنه فإن:

$0 \leq 2 - 2\sin 2\theta \leq 4$

$\Rightarrow |f(z)|^2 = 4$

$\Rightarrow f(z) = 2$

ويجب أن المقطع 2 يجب أن تقع على محيط الدائرة

$2 - 2\sin 2\theta = 4$

$\Rightarrow -2\sin 2\theta = 2$

$\Rightarrow \sin 2\theta = -1$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \sin \frac{3\pi}{2}$

أما $2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

أو

$2\theta = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

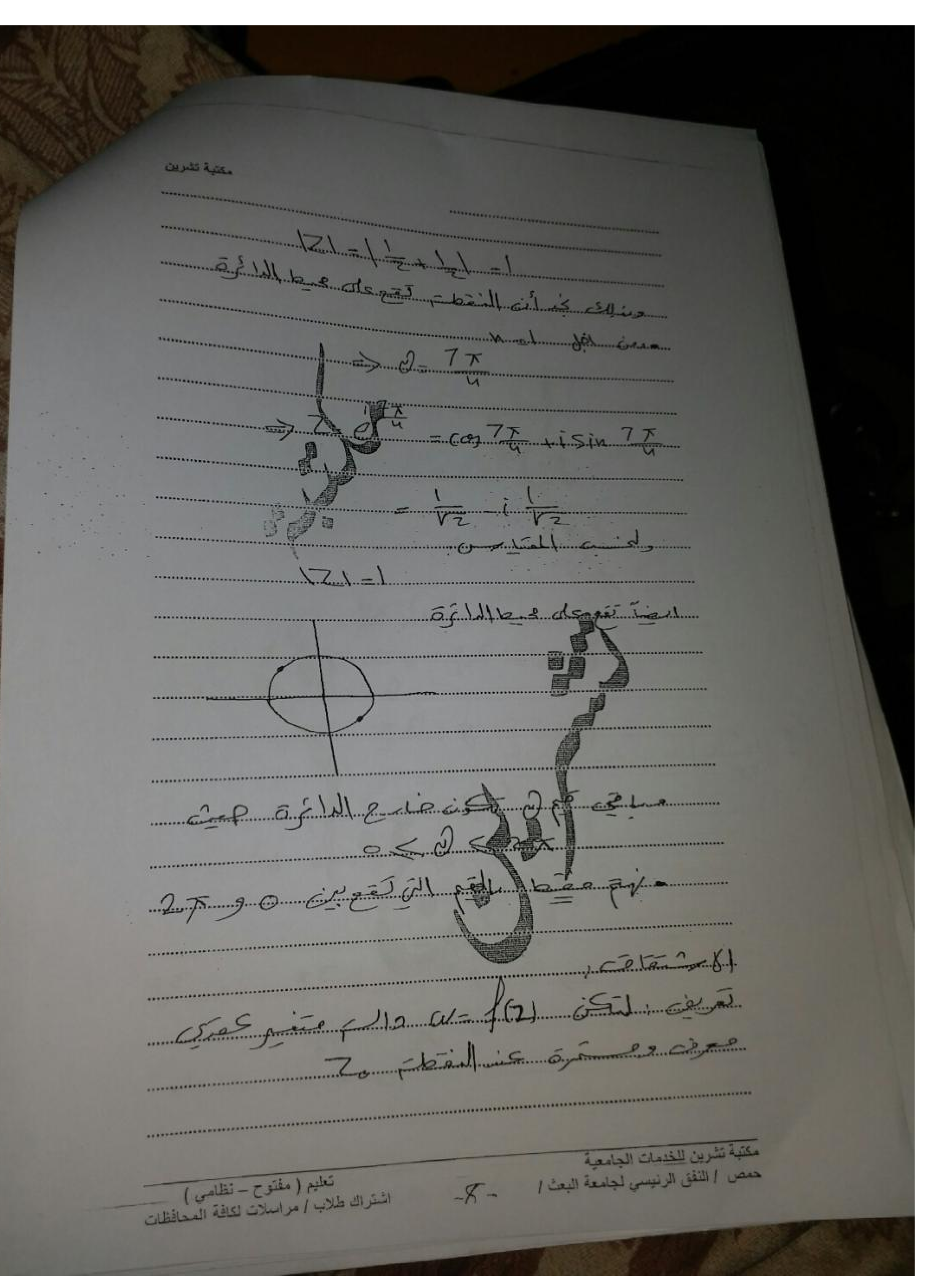
من أجل $k = 0$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

ولنحسب المقياس،



$|Z| = \left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = 1$

وبذلك نجد أن النقطة تقع على محيط الدائرة

من أجل $n = 1$

$\Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow Z = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

ولنحسب المقياس

$|Z| = 1$

أيضاً تقع على محيط الدائرة

ملاحظة: لم تكن خارج الدائرة حيث $n < 0$

نهتم فقط بالقيم التي تقع بين 0 و 2π

الاشتقاق:

تعريف: لتكن $w = f(z)$ دالة متغير عقدي معرفة ومستمرة عند النقطة Z_0

تسمى f في هذه الحالة دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت النهاية الآتية:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

موجودة.

• وإذا كانت النهاية موجودة: نرمز لها بالرمز $f'(z_0)$ في المشتقة الأولى للدالة f عند z_0 عندئذ:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{.....} \quad (1)$$

• إذا وضعنا $\Delta z = z - z_0$ فتصبح العلاقة (1) بالشكل:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \quad \text{.....} \quad (2)$$

• وإذا وضعنا $\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$ فتصبح العلاقة (2) بالشكل:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \quad \text{.....} \quad (3)$$

وأحياناً نعبر عن المشتق الأول للدالة f بالرمز $\frac{d}{dz} f(z)$ أي:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z)$$

أمثلة:

① اثبت أن الدالة $f(z) = z^2$ دالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي.

الحل:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z$$

فالدالة قابلة للاشتقاق

وبالتالي المشتق الأولى هي:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) = 2z$$

② لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = |z|^2$$

اثبت أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
ما هي قيمة المشتقة الأولى
وأن هذه الدالة غير قابلة عند بقية نقاط المستوي العقدي

الحل:
$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \frac{(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \frac{z\overline{\Delta z} + (\Delta z)\cdot\bar{z} + (\Delta z)(\overline{\Delta z})}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta w}{\Delta z} = z\cdot\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}$$

الحالة الأولى:

عندما $z=0 \Rightarrow \bar{z}=0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 0$$

أي أن $f'(0) = 0$

الحالة الثانية: $z \neq 0$

ولنحسب قيمة النهاية على المحور الحقيقي:

$\Delta z = \Delta x \Leftarrow \Delta \bar{z} = \Delta x \Leftarrow \Delta \bar{z} = \Delta z$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = z + \bar{z}$$

لنحسب قيمة النهاية على المحور التخيلي:

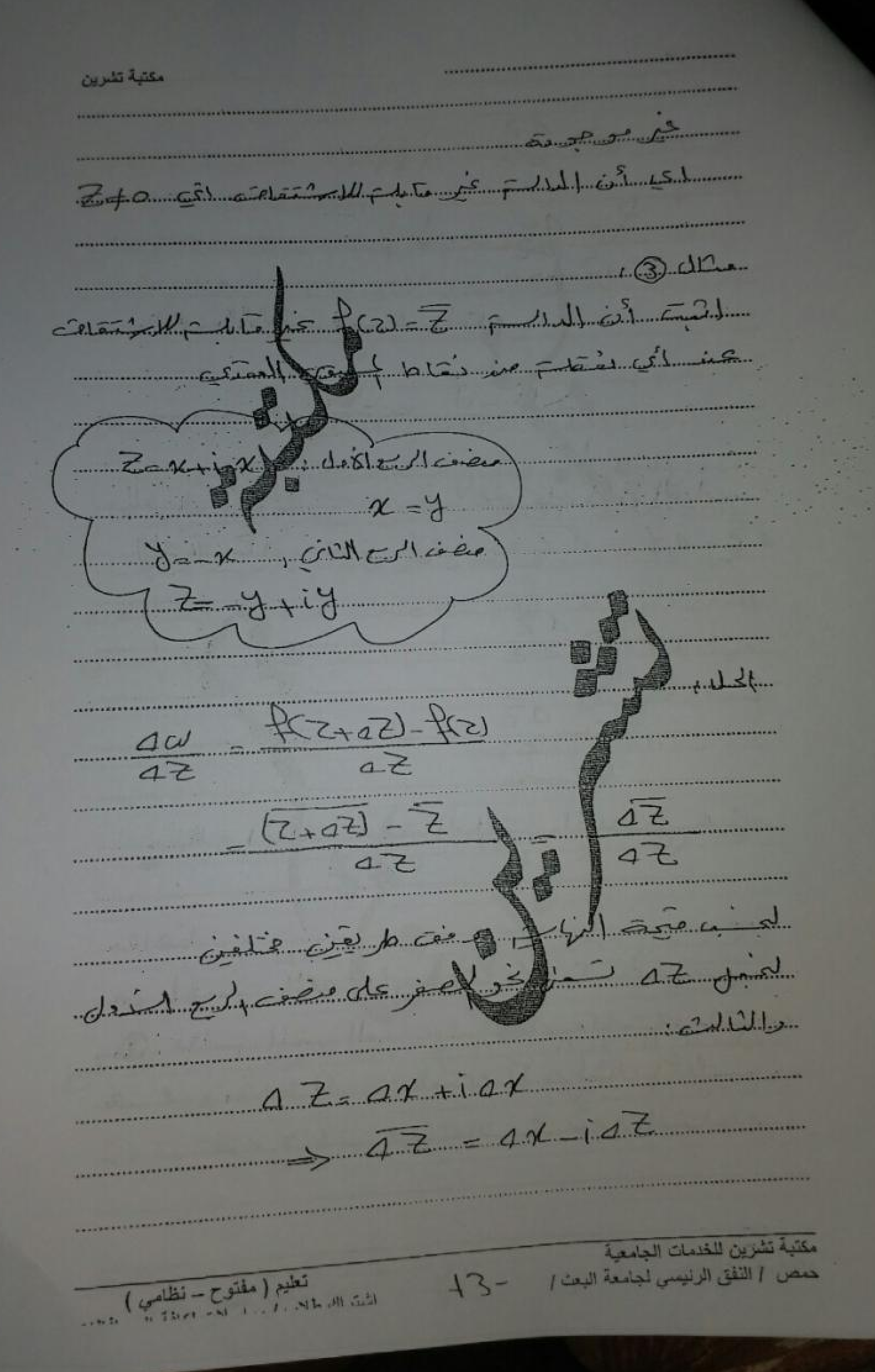
$\Delta z = i\Delta y \Leftarrow \Delta \bar{z} = -i\Delta y \Leftarrow \Delta \bar{z} = -\Delta z$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = -z + \bar{z}$$

نلاحظ أن قيمة النهاية اختلفت باختلاف الطريق المسلوك مما يعني أن النهاية:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$



غير موجودة

أي أن الدالة غير قابلة للاشتقاق أي $z \neq 0$

مثال (3):

اثبت أن الدالة $f(z)=\bar{z}$ غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من نقاط المستوي العقدي

منصف الربع الأول: $z = x + ix$

$x = y$

منصف الربع الثاني: $y = -x$

$z = -y + iy$

الحل:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

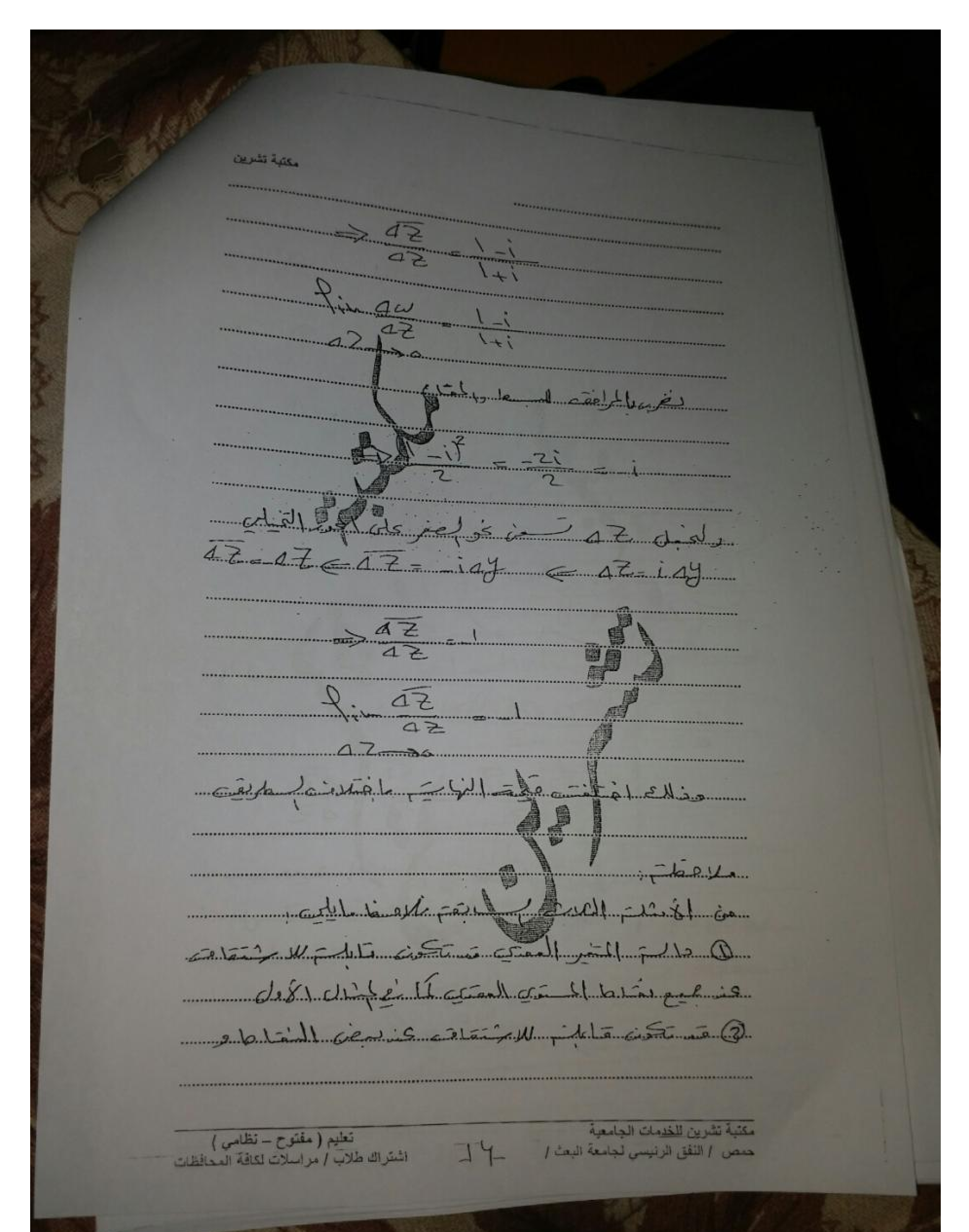
لحساب قيمة النهاية عن طريقين مختلفين

لنجعل Δz تسعى للصفر على منصف الربع الأول

والثاني:

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta x$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta z$$



$$\Rightarrow \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{1-i}{1+i}$$

نضرب بالمرافق للبسط والمقام

$$\Rightarrow \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

ولنجعل Δz تسعى نحو الصفر على المحور التخيلي

$$\overline{\Delta z} = -\Delta z \Leftarrow \overline{\Delta z} = -i\Delta y \Leftarrow \Delta z = i\Delta y$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$$

وهكذا اختلفت قيمة النهاية باختلاف الطريق

ملاحظة:

من الأمثلة السابقة نلاحظ ما يلي:

① دالة المتغير العقدي قد تكون قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط المستوي العقدي كما في المثال الأول

② قد تكون قابلة للاشتقاق عند بعض النقاط و

غير قابلة للاشتقاق عند بعض الآخر كما في المثال الثاني

③ وقد تكون غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من نقاط المستوي العقدي كما في المثال الثالث

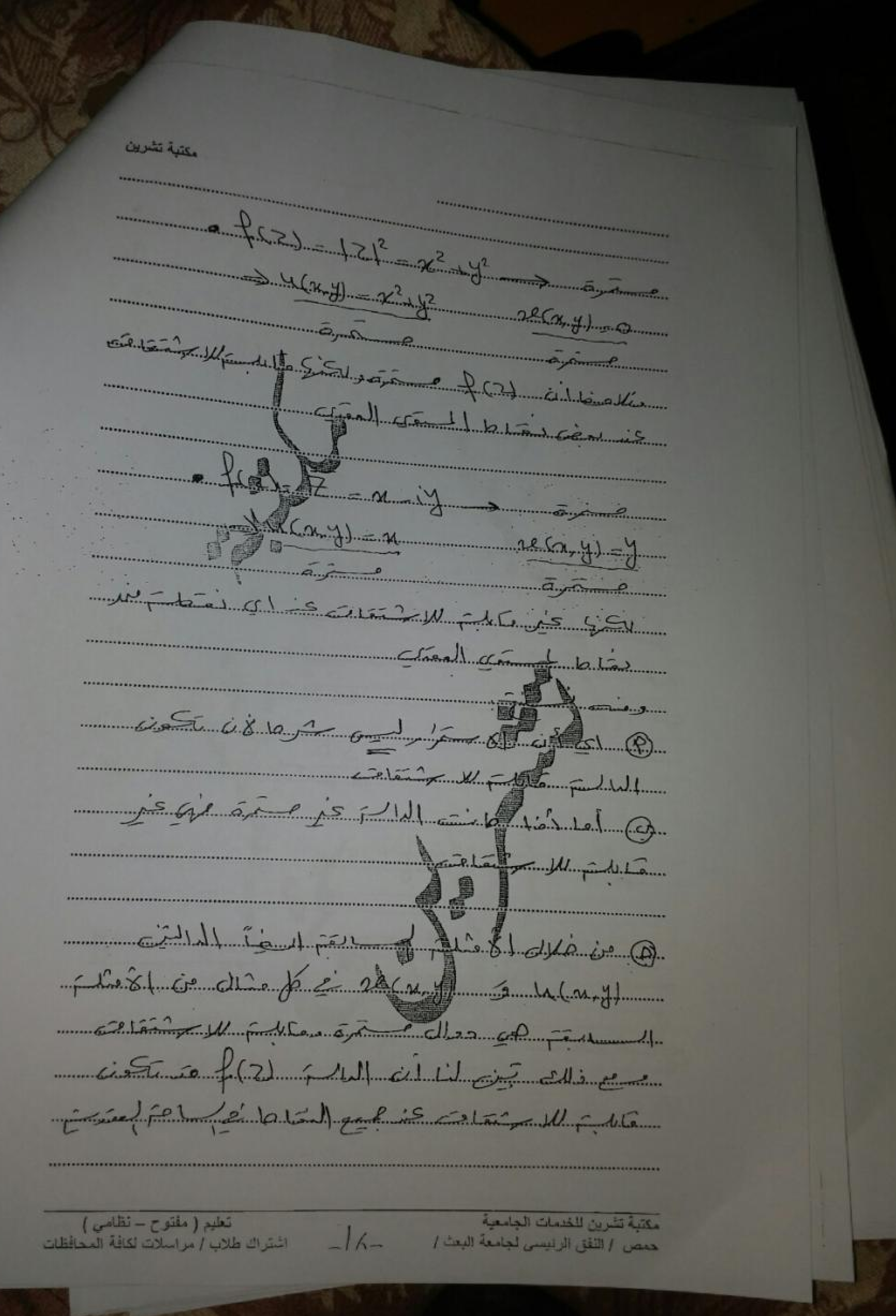
ملاحظة:
من خلال الأمثلة السابقة نلاحظ أن كل دالة من هذه الدوال هي دالة مستمرة مع ذلك تبين لنا أن الدالة $f(z)$ قد تكون قابلة للاشتقاق عند جميع النقاط وقد تكون غير قابلة للاشتقاق عند البعض وغير قابلة للاشتقاق عند بعض الآخر وقد تكون غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من نقاط المستوي العقدي.

نلاحظ ذلك في الأمثلة:

- $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \longrightarrow$ مستمرة

$\Rightarrow \underset{\text{مستمرة}}{u(x,y) = x^2 - y^2} \qquad \underset{\text{مستمرة}}{v(x,y) = 2xy}$

ونلاحظ أن الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط المستوي



• $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ⟵ مستمرة

$\Rightarrow u(x,y) = x^2 + y^2$ ، $v(x,y) = 0$

مستمرة ، مستمرة

مع أن الدالة $f(z)$ مستمرة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند بعض نقاط المستوي العقدي

• $f(z) = \bar{z} = x - iy$ ⟵ مستمرة

$u(x,y) = x$ ، $v(x,y) = -y$

مستمرة ، مستمرة

لكنها غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من نقاط المستوي العقدي

ومنه

(a) أي أن كون الدالة مستمرة ليس شرطاً لأن تكون الدالة قابلة للاشتقاق

(b) أما إذا كانت الدالة غير مستمرة فهي غير قابلة للاشتقاق

(c) من خلال الأمثلة السابقة نجد أن الدالتين $u(x,y)$ و $v(x,y)$ في كل مثال من الأمثلة السابقة هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق ومع ذلك تبين لنا أن الدالة $f(z)$ قد لا تكون قابلة للاشتقاق عند جميع النقاط في المستوي العقدي

وقد تكون قابلة للاشتقاق عند بعض النقاط وغير قابلة عند بعضها الآخر في مجال تعريفها وقد تكون غير قابلة في جميع نقاط مجال التعريف

ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق عند z_0 عندئذٍ يلزم أن تكون الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 ونؤكد صحة ذلك بالاستفادة من العلاقة التالية:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \underbrace{\lim_{z \to z_0} (z - z_0)}_{=0}$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

كل دالة قابلة للاشتقاق هي دالة مستمرة

مبرهنة : حدود مبرهنات

اذا كانت $w = f(z)$ و $W = g(z)$ دالتان قابلتان للاشتقاق عند z

① $$\frac{d}{dz}\left[f(z) \mp g(z)\right] = f'(z) \mp g'(z)$$

② $$\frac{d}{dz}\left[f(z)\, g(z)\right] = f'(z).g(z) + f(z).g'(z)$$

③ $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z).g(z) - f(z).g'(z)}{g^2(z)}$$

مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام

④ c ثابت عددي

- $\frac{d}{dz} c = 0$
- $\frac{d}{dz} z = 1$
- $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$

مثال :

$$\frac{d}{dz} z^3 = 3z^2$$

⑤ اذا كانت $w = f(z)$ دالة قابلة للاشتقاق عند z

وكانت الدالة $W = g(w)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $w_0 = f(z_0)$ عندئذ تكون الدالة

$$F(z) = (g \circ f)(z)$$

قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 ، والمشتقة الأولى تعطى بالعلاقة :

$$F'(z) = \frac{dg}{dw} \cdot \frac{df}{dz}$$

تمرين : اوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$F(z) = (z^3 + 2z)^5$$

الحل :

نضع $W = g(w) = w^5$ و $w = f(z) = z^3 + 2z$

عندئذ :

$$F(z) = (g \circ f)(z)$$
$$= g(f(z)) = g(z^3 + 2z)$$
$$= (z^3 + 2z)^5$$

ومنه فإن :

$$F'(z) = \frac{dg}{dw} \cdot \frac{df}{dz}$$
$$= 5w^2(3z^3 + 2)$$
$$= 5(z^3 + 2z)^4(3z^2 + 2)$$

شرطي كوشي ريمان: ليكن التابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع

قابل للاشتقاق أي أن:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$ موجودة

$$f'(z)=\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\operatorname{Re} f'(z)=\operatorname{Re}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$\operatorname{Im} f'(z)=\operatorname{Im}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

بما أن التابع f قابل للاشتقاق أي أن النهاية موجودة وإنها موجودة أي أنه قيم هذه النهايات لا تختلف باختلاف المسارات

* على المحور الحقيقي:

$$\Delta z=\Delta x$$

* $Re\, f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}$

$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$

$Im\, f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$

$= \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

أي أنه: $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ ---- (1)

* لنفرض [illegible] على المحور التخيلي:

$\Delta z = i \Delta y$

نكتب العلاقة * * بالشكل التالي

$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} - i \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}$

الحقيقي ... التخيلي

$Re\, f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y}$

$= \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\operatorname{Im} f'(z) = -\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{--- (2)}$$

من (1) و (2) نستنتج:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

وهاتان المعادلتان ندعوهما شرطي كوشي ريمان

بهذا الشرط نكون قد انتهينا من البرهنة التالية:

مبرهنة:

اذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ دالة قابلة للاشتقاق عندئذ تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للدالتين u و v بالنسبة للمتغيرين المستقلين x و y موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك تحقق شرطي كوشي ريمان الآتيين:

صورة

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad و \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

والمشتقات الأولى عندئذٍ تحقق العلاقة (1) أو (2)

من هذه المبرهنة نستنتج أن شرطا كوشي ريمان هما شرطان لازمان ولكنهما غير كافيين بمعنى إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فيلزم أن يتحقق شرطا كوشي ريمان أما إذا تحقق شرطا كوشي ريمان فليس من الضروري أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق.